ЖУРНАЛ ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

Квантик

математические сюрпризы

наглядная математика

№1 ЛИСТ МЁБИУСА
своими руками

январь 2012

ЧУДЕСА ЛИНГВИСТИКИ

ОГЛЯНИСЬ ВОКРУГ

Enter

№1 | январь 2012

Издается при поддержке Московского центра непрерывного математического образования (МЦНМО)

e-mail: kvantik@mccme.ru

ДОРОГИЕ ДРУЗЬЯ!

Вы держите в руках первый номер совсем нового журнала для любознательных школьников – «Квантик». Журнал посвящён занимательным вопросам и задачам по математике, лингвистике, физике и другим естественным наукам. Вы узнаете много интересного об окружающем мире.

На страницах этого номера вы прочтёте о замечательном учёном, узнаете о президенте, который доказывал теоремы, проделаете увлекательные эксперименты с листом Мёбиуса, поломаете голову над простыми с виду задачками, научитесь строить некоторые правильные многоугольники. Вас ожидает встреча с удивительными числами, забавными задачами в картинках, причудами лингвистики и другими – часто довольно неожиданными – вещами.

В каждом номере журнала (и, конечно, в этом) ищите задачи нашего конкурса – попробовать свои силы может каждый, победителей ждут призы.

Напишите нам, было ли вам интересно, что понравилось в журнале, что совсем не понравилось, о чём ещё вы хотели бы узнать.

Наш электронный адрес:
kvantik@mccme.ru

Художник Yustas-07

СОДЕРЖАНИЕ

С. Дориченко

ПРИКЛЮЧЕНИЯ со СТРЕЛКАМИ

– Ого, уже пять вечера, – важно посмотрел на свои часы Федя. – И правда, пора домой.

У Феди были большие красивые часы со стрелками, они светились в темноте. А все вокруг носили электронные часы, или мобильник как часы использовали.

– Федь, ну зачем тебе такие часы? Это ведь прошлый век! – стал подшучивать над Федей Даня.

– Это чтобы задачки по математике решать, – ответил Федя. – Я сейчас в Заочной математической школе учусь, а там кучу задач про часы со стрелками задали. Вот я и сказал родителям: покупайте мне такие часы, а то школу брошу.

– Да ладно выдумывать, неужто из-за задачек носишь?

– Ну, если честно, мне такие больше нравятся просто. Но одну задачку я с их помощью решил, между прочим. Вот она какая была:

Сколько раз в сутки минутная и часовая стрелки часов совпадают?

– Ну и как же ты её решил?

– Да вот, сначала всё думал, думал – так ничего и не придумал. А потом взял, да и просидел рядом с часами целые сутки и все совпадения сосчитал.

– Не спал целые сутки?

– Ну нет, там же понятно, что если стрелки совпали, то они в следующий раз ещё не скоро совпадут. Я заметил, что они примерно раз в час совпадают. Днём я просто всё время на часы поглядывал, чтобы момент не пропустить. А ночью будильник ставил – как стрелки совпадут, я на час засыпаю, потом просыпаюсь – стрелки уже снова близко. Так и сосчитал.

– Ну ты даёшь. Слушай, а ведь зря ты так себя мучил. Можно было гораздо проще сделать.

– Это как еще проще?

– Да просто прокрутил бы колесико на часах, чтобы часовая стрелка прошла 24 часа, и сосчитал бы совпадения.

– Так нечестно. И вообще, как я, интереснее было.

– Да и что там считать, сам же сказал – стрелки раз в час совпадают. В сутках у нас 24 часа, значит, получаем 24 совпадения.

– А вот и нет. От одного совпадения до другого больше часа проходит.

– Ну тогда, наверное, 23.

– Всё равно неверно!

– Но должно же быть решение без круглосуточных наблюдений. Давай соображать. Часовая стрелка поворачивается со скоростью ${}^{1}/_{12}$ циферблата в час, а минутная – со скоростью 1 циферблат в час. Значит, сближаются они со скоростью $1-{}^{1}/_{12}={}^{11}/_{12}$ циферблата в час.

– Это почему?

– Ну вот стрелки встретились, и тут минутная стрелка как бы снова часовую догоняет. Но и часовая на месте не стоит. Значит, скорость, с которой минутная стрелка догоняет часовую – это разность их скоростей.

– Вроде понятно, а дальше что?

– Слушай, а давай в другую систему отсчета перейдем. Будем считать, что часовая стрелка неподвижна.

– Это как?

– Представь, что ты микроб и на часовой стрелке сидишь. Или, если хочешь, можешь у себя перед носом часы все время крутить так, чтобы часовая стрелка всегда ровно вверх смотрела.

– Ну, представил. И что?

– Смотри, минутная стрелка тогда будет вращаться вокруг часовой со скоростью ${}^{11}/_{12}$ циферблата в час, и будет совпадать с ней каждый раз, когда пройдёт весь циферблат.

– Ага. Первое совпадение мы считаем в 00 часов 00 минут. Значит следующий раз они совпадут через… через ${}^{12}/_{11}$ часа.

– Так это же решение. Стрелки будут совпадать каждые $^{12}/_{11}$ часа. За сутки совпадений будет $24 : (^{12}/_{11})$, то есть $24 \cdot (^{11}/_{12})$, а это 22. И как раз мы не учитываем совпадение в следующие 00 часов 00 минут, это ведь уже другие сутки будут.

– Правильно, – подтвердил Федя, – я столько же насчитал.

– Ты, кстати, мог бы всего 12 часов свои наблюдения делать. А потом на 2 всё умножить.

– Эх, так ведь вообще всё очевидно. Совпадения будут через каждый час с небольшой добавкой. Начинаем считать с полуночи. Второе совпадение будет после часа, третье – после двух... А двенадцатое-то уже ровно на полдень попадёт, на начало второй половины суток. Из добавок как раз лишний час набегает.

– Вот и выходит 11 раз за одну половину суток и еще 11 за другую.

– А там ещё задача есть, слушай.

Сколько раз в сутки минутная и часовая стрелки часов образуют угол 90°?

– Ну, это почти то же самое. Между соседними моментами, когда стрелки совпадают, они два раза под углом 90° оказываются. Промежутков между совпадениями – от первого до 23-го, в начале следующих суток, – будет 22. Так что ответ 44.

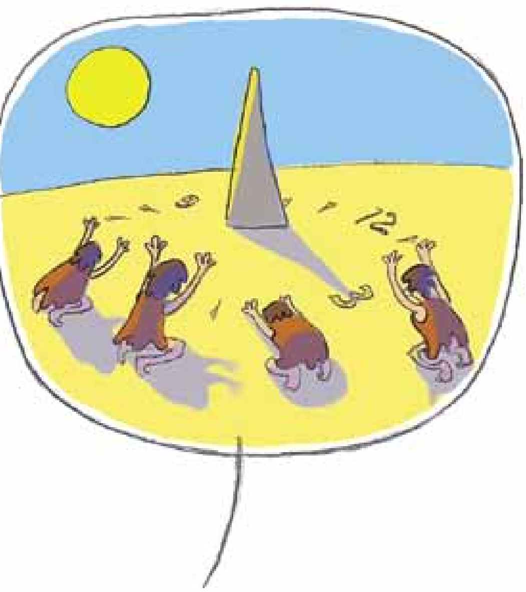
– Лихо ты задачки щёлкаешь. А такую как решать?

В будильнике кроме обычных часов есть ещё стрелка звонка. Один часовщик сделал шуточный будильник, в котором стрелка звонка двигалась равномерно, причём всё время была на прямой, делящей угол между часовой и минутной стрелками пополам. Сколько оборотов сделает такая стрелка за сутки?

– Эту давай в следующий раз решим. А то я на футбол опоздаю. Пока!

– Пока! До завтра!

Решите задачу, которую ребята отложили на следующий день.



Художник А. Аблямитова

Ответ читайте в следующем номере

Художник Е. Константинова

В. Дубровский

НЕЧЁТНЫЕ ЧИСЛА И КВАДРАТЫ

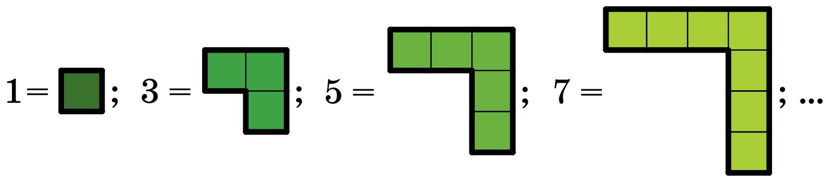
Чему равна сумма первых нескольких нечётных чисел?

$$1 = 1,$$
$$1 + 3 = 4,$$
$$1 + 3 + 5 = 9,$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 16,$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25, \ldots$$

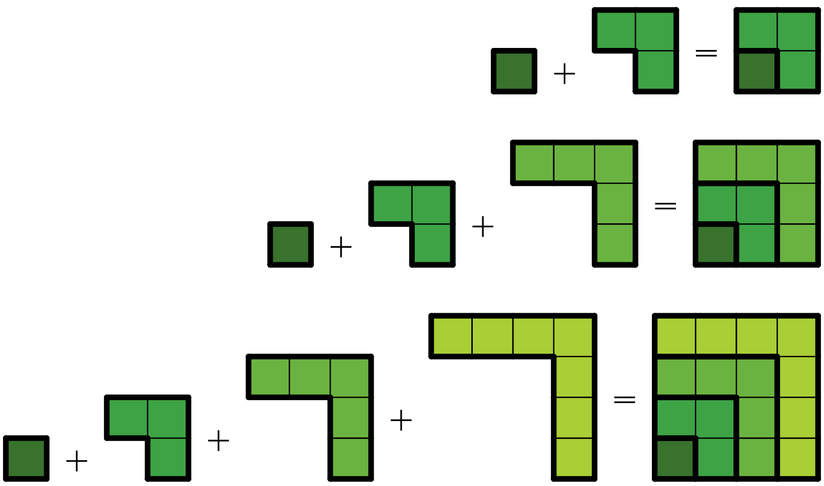
Кажется, получаются точные квадраты:

$$1 = 1 \cdot 1, \quad 4 = 2 \cdot 2, \quad 9 = 3 \cdot 3, \quad 16 = 4 \cdot 4, \quad 25 = 5 \cdot 5, \ldots$$

Как же это доказать? Сделаем трюк – представим нечётные числа в таком виде:



Складывая квадрат из уголков, получаем:



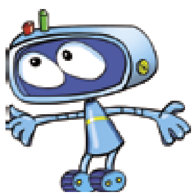
$1+3=2^2,$

$1+3+5=3^2,$

$1+3+5+7=4^2.$

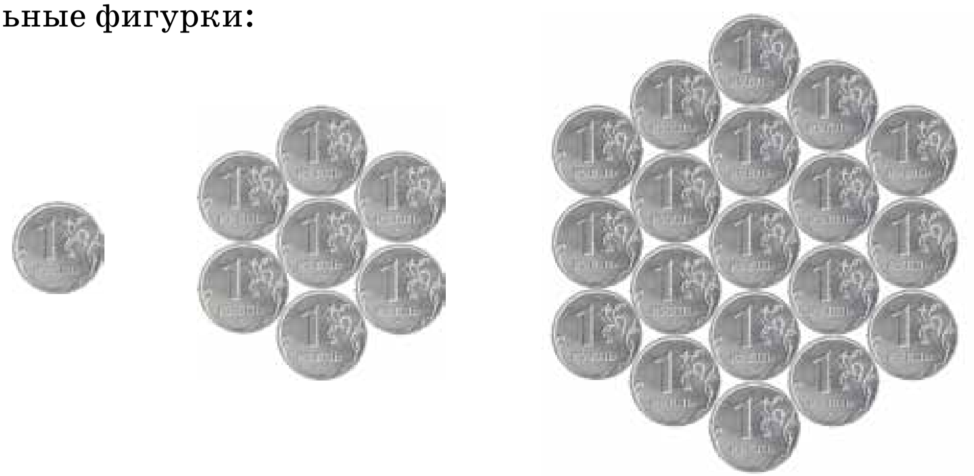
Аналогично для любого числа n мы доказали, что

сумма первых n нечётных чисел равна числу n^2.



МОНЕТКИ И КУБЫ

Начнём издалека. Легко выложить из монеток такие шестиугольные фигурки:

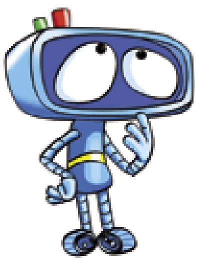


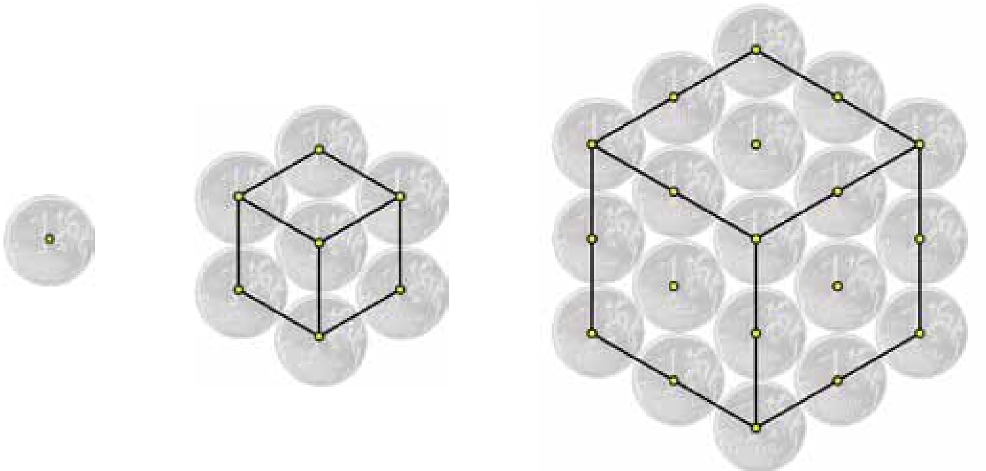
Сложим количества монеток в первых нескольких фигурках:

$$1 = 1 = 1 \cdot 1 \cdot 1,$$
$$1 + 7 = 8 = 2 \cdot 2 \cdot 2,$$
$$1 + 7 + 19 = 27 = 3 \cdot 3 \cdot 3,\ \ldots$$

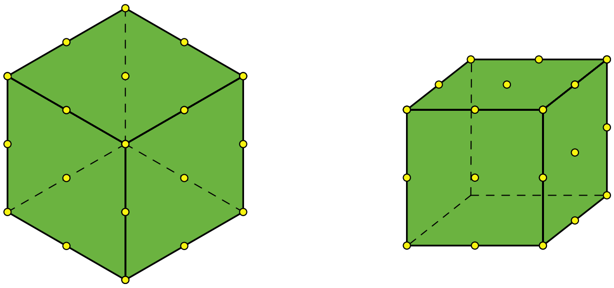
Получаются третьи степени натуральных чисел, то есть точные кубы! Как это объяснить?

Отметим центры монеток и проведём несколько линий:

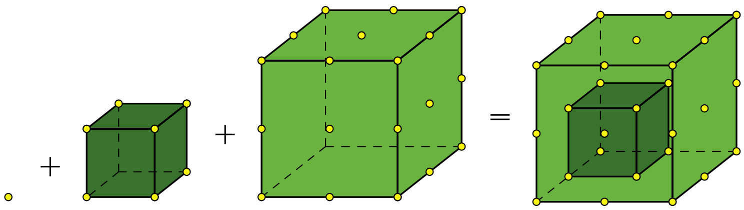




Видите передние три грани кубиков? На гранях отмечены точки; каждой точке соответствует монетка. Повернём эти кубики так, чтобы их грани были лучше видны (число точек не изменится):



Чтобы найти суммарное число монеток, подсчитаем суммарное число точек в гранях кубиков. Для этого вложим кубики один в другой, как на рисунке:



Получается один куб, заполненный точками. Количество точек легко найти: если на ребре куба n точек, то всего в кубе их ровно n^3. Значит, именно столько монеток и будет суммарно в первых n шестиугольных фигурках.

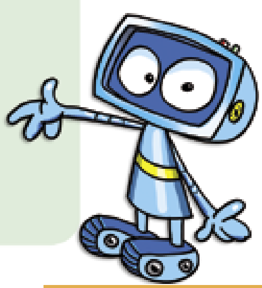
ЗАДАЧА

Проверьте справедливость равенств

$$1 = 1^2,$$
$$1 + 2 + 1 = 2^2,$$
$$1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 3^2,$$
$$1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 = 4^2$$

и докажите утверждение:

$1 + 2 + \ldots + (n - 1) + n + (n - 1) + \ldots + 2 + 1 = n^2$.



Г. Фельдман

ПРЕЗИДЕНТ ДОКАЗЫВАЕТ ТЕОРЕМЫ

ДЖЕЙМС ГАРФИЛД

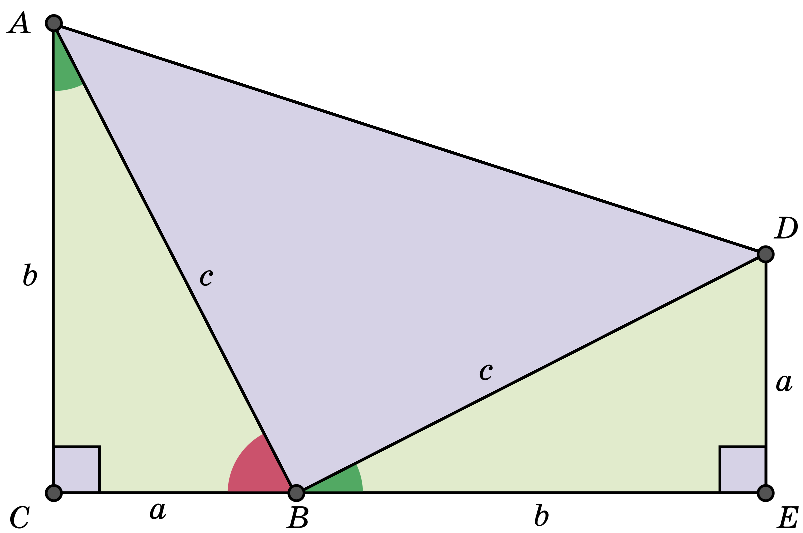
Джеймс Гарфилд был одним из самых незаурядных президентов США. В юности он успел побывать боцманом и плотником, позже работал адвокатом, учителем, директором одного из высших учебных заведений. Во время гражданской войны 1861 года Гарфилд создал отряд добровольцев, возглавил его и вскоре получил чин генерала. После войны он стал членом Конгресса, а в 1881 году, в возрасте 50 лет, был избран президентом. Увы, через три месяца Джеймс Гарфилд был тяжело ранен фанатиком и скончался спустя два с половиной месяца.

Среди интересов Гарфилда были языки и математика. Он знал несколько языков и даже умел писать левой рукой по-древнегречески, а правой – по-латыни[1]. А ещё он придумал и опубликовал своё доказательство теоремы Пифагора.

Теорема Пифагора

В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Нарисуем треугольник BDE, равный треугольнику ABC, так чтобы BE и BC оказались на одной прямой:



[1] Способность писать обеими руками (и вообще одинаково хорошее использование двух рук) называют *амбидекстрией*.

Отрезки AC и DE перпендикулярны этой прямой, а значит, параллельны друг другу, откуда $ACED$ – прямоугольная трапеция.

Заметим ещё, что угол ABD прямой, потому что он и примыкающие к нему красный и зелёный углы образуют развёрнутый угол, а сумма красного и зелёного углов равна 90° (посмотрите на треугольник ABC).

Тогда треугольник ABD – прямоугольный и его площадь равна $c^2/2$. Площадь каждого из треугольников BDE и ABC есть $ab/2$. Вместе эти три треугольника составляют всю трапецию.

Но площадь трапеции можно найти и по-другому. Из двух копий такой трапеции легко сложить квадрат со стороной $a + b$ – надо перевернуть одну копию и приложить их друг к другу по стороне AD.

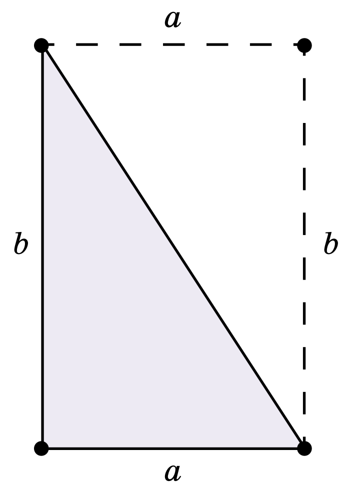
Значит, площадь трапеции равна $(a + b)^2/2$. Имеем тогда:

$$\frac{(a+b)^2}{2} = 2\frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2},$$

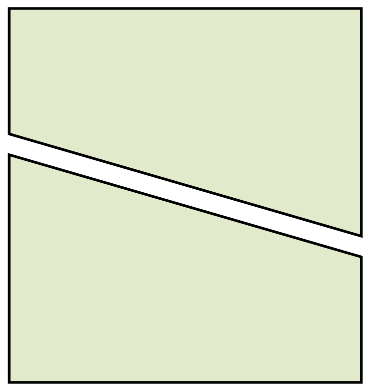
$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2,$$

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Вот и всё!



Из рисунка видно, что площадь прямоугольного треугольника с катетами a и b равна $\frac{ab}{2}$



Из двух копий прямоугольной трапеции складывается квадрат

ИНТЕРЕСНЫЕ ФАКТЫ

Известно более 360 доказательств теоремы Пифагора. Вальтер Литцман даже написал целую книгу «Теорема Пифагора», где собрал наиболее интересные из них.

Возможно, древние египтяне уже знали теорему Пифагора. Они строили прямые углы с помощью верёвочного треугольника со сторонами 3, 4, 5.

РЕНЕ ДЕКАРТ

А. Спивак

РЕНЕ ДЕКАРТ
René Descartes (фр.)
великий французский
философ и математик
(31.03.1596 – 11.02.1650)

Верно определяйте слова, и вы освободите мир от половины недоразумений.

Р. ДЕКАРТ

До сих пор точно неизвестно место рождения учёного (предположительно – это город Лаэ в Турени), но многие интересные факты из его детства и юности вполне достоверны. В роду Декарта были весьма образованные люди, и хотя его мать умерла, когда Рене было чуть больше года, а отец не занимался ни наукой, ни литературой, мальчик получил прекрасное образование. В раннем детстве Рене был слаб здоровьем, и отец стремился прежде всего укрепить его физически. Однако природная любознательность мальчика была столь велика, что отец решился отдать его в иезуитский коллеж Ла-Флеш в провинции Анжу. Немаловажным обстоятельством было то, что ректор коллежа Этьен Шарле приходился дальним родственником семье Декартов.

В отступление от довольно суровых школьных правил мальчика поместили в отдельную комнату и позволили не присутствовать на утренних занятиях. На всю жизнь у Декарта осталась привычка по утрам, не вставая с постели, подолгу размышлять; эти часы навсегда стали для него наиболее плодотворными.

Воспитанники Ла-Флеш изучали латинский язык и литературу, греческий язык, историю, поэзию и риторику; курс философии, включавший логику, физику, математику, этику и метафизику. Математика тогда подразделялась на арифметику, геометрию, музыку и астрономию.

Школьники ставили спектакли, фехтовали, играли в кегли. Многие, в том числе Декарт, увлекались поэзией. Коллеж был воистину замечательным, и Декарт всегда с благодарностью отзывался о своих учителях. Но это не мешало ему сомневаться в самих основах философии, которую ему преподавали.

Самостоятельность мышления Декарта часто приводила в замешательство его учителей. «Признаюсь, – писал он позже в трактате «Правила для руководства ума», – я родился с таким умом, что главное удовольствие при научных занятиях для меня заключалось не в том, что я выслушивал чужие мнения, а в том, что всегда стремился создать свои собственные».

После завершения образования перед молодым человеком были открыты две традиционные карьеры: священника и военного. Декарт избрал военную службу, которая сама по себе его не привлекала. Зато она «позволяла путешествовать,

увидеть дворы и армии, встречаться с людьми разных нравов и положений и собрать разнообразный опыт, испытать себя во встречах, которые пошлёт судьба, и повсюду поразмыслить над встречающимися предметами так, чтобы извлечь какую-нибудь пользу из таких занятий».

В 1618 году Декарт поступил на военную службу добровольцем голландской протестантской армии. Он принимал участие в голландской революции и Тридцатилетней войне. Именно в армии он пришёл к мысли, что в основе всех наук, кроме математики, лежат не строгие доказательства, а лишь предположения.

Ещё несколько лет он провёл, участвуя в осаде Ларошели, а затем вернулся в Париж, где полностью отдался научной работе. Однако о свободомыслии Декарта стало известно иезуитам, которые обвинили учёного в ереси. В 1628 году Рене Декарт спешно переезжает в Голландию, где проводит 20 лет. Он ведёт обширную переписку с лучшими учёными Европы, изучает самые различные науки – от медицины до метеорологии.

Слава Декарта как создателя новой философии, в основе которой лежала математика, быстро распространялась. Достоинства нового метода были исключительно велики, и Декарт продемонстрировал их, открыв множество положений, неизвестных ни математикам древности, ни его современникам. Он писал:

«Чтобы решить какую-либо задачу, нужно сначала считать её как бы решённой и обозначить буквами все, как данные, так и неизвестные, величины. Затем, не делая различия между данными и искомыми величинами, заметить зависимость между ними так, чтобы получить два выражения для одной и той же величины; это приводит к уравнению, служащему для решения задачи, ибо можно приравнять одно выражение другому».

Иначе говоря, переходя с языка алгебры на язык геометрии и обратно, можно пользоваться преимуществами обоих методов. Так было положено начало важной области математики – аналитической геометрии. Термин «декартова система координат» укоренился в русском математическом языке, а у европейцев она же называется «Cartesian system» (от латинского написания его фамилии Cartesius).

DISCOURS
DE LA METHODE
Pour bien conduire sa raison, & chercher
la verité dans les sciences.
PLUS
LA DIOPTRIQVE.
LES METEORES.
ET
LA GEOMETRIE.
Qui sont des essais de cete METHODE.

A LEYDE
De l'Imprimerie de IAN MA
CIƆ IƆ C XXXVII.
Avec Privilege.

Титул книги Рене Декарта «Рассуждение о методе, чтобы верно направлять свой разум и отыскивать истину в науках», изданной в 1637 г.

Королева Кристина беседует
с Рене Декартом
(картина шведского художника
Нильса Форсберга (1842–1934),
которая вышла
из-под его кисти в 1884 году)

В 1634 году Декарт завершает свою программную книгу под названием «Мироздание, или Трактат о свете». Однако за год до этого он узнаёт о трагической судьбе Галилея, чуть было не замученного инквизицией. Поэтому Декарт не решился издать этот труд. «Признаюсь, если движение Земли есть ложь, то ложь и все основания моей философии, так как они явно ведут к этому же заключению». Вскоре, тем не менее, появляются другие книги Декарта:

«Рассуждение о методе…» (1637),
«Размышления о первой философии…» (1641),
«Начала философии» (1644).

Хотя протестантские богословы Голландии наложили проклятие на труды Декарта, кардинал Ришельё, принц Оранский, благожелательно отнёсся к его трудам и разрешил их издание во Франции. В 1648 г. французское правительство в знак признательности заслуг назначило Декарту солидную пенсию. Но когда он добрался до Парижа, во Франции началась гражданская война (Фронда) и позвавшие его люди проявили к нему неприятие и равнодушие.

Все науки настолько связаны между собою, что легче изучать их все сразу, нежели какую-либо одну из них в отдельности от всех прочих.

Р. ДЕКАРТ

РЕНЕ ДЕКАРТ

Замок Шамбор.
Гравюра (фрагмент), автор неизвестен

В 1649 г. Декарт, измученный многолетней травлей за вольнодумство, поддался уговорам юной шведской королевы Кристины и переехал в Стокгольм. Декарта приняли любезно, но положение его при дворе оказалось неопределённым, среди учёных-коллег он не смог найти единомышленников, зато завистников – предостаточно. Привычный режим дня нарушился, пришлось отказаться от долгих утренних размышлений и погрузиться в светскую жизнь.

Декарт пытался работать, тосковал по уединению. Тем временем королева решила, что пора начать занятия философией, и назначила их три раза в неделю, в 5 часов утра. Была зима, на редкость холодная даже для привычных к ней шведов. Вынужденный вставать до рассвета и добираться до дворца под леденящим ветром, Декарт окончательно подорвал своё и так весьма слабое здоровье. Он слёг первого февраля с пневмонией и 11 февраля 1650 г. скончался в возрасте 53 лет.

К концу жизни Декарта отношение церкви к его учению стало резко враждебным. Вскоре после его смерти основные сочинения Декарта попали под запрет, а Людовик XIV специальным указом запретил преподавание философии Декарта во всех учебных заведениях Франции.

Я мыслю, следовательно, существую, — есть первое и вернейшее из всех познаний, встречающееся каждому, кто философствует в порядке.

Р. ДЕКАРТ

В честь Декарта назван кратер на луне.

Д. Кожемякина

ЛИСТ МЁБИУСА

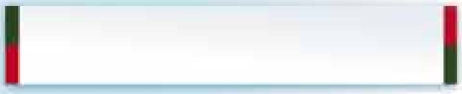


Рис. 1

Рис. 2

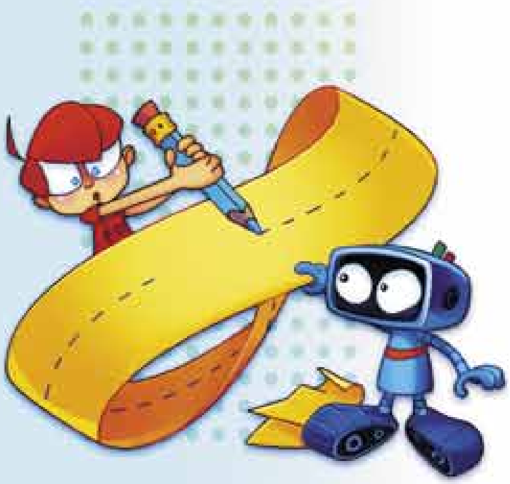


Рис. 3

Лист Мёбиуса изобрели независимо друг от друга в 1858 году немецкие учёные – математик и астроном Август Фердинанд Мёбиус и математик и физик Иоганн Бенедикт Листинг.

Так часто бывает – одна и та же яркая идея появляется у разных людей примерно в одно и то же время. Это значит, что пришла пора для этого открытия.

Возможно, кто-то и гораздо раньше догадывался перекрутить и склеить полоску бумаги. Но именно Мёбиус и Листинг впервые обратили внимание многих на этот удивительный объект и описали его свойства.

Пора и нам познакомиться с этим маленьким математическим чудом. Итак…

ПЕРВОЕ ЗНАКОМСТВО

Возьмите бумажную полоску (рис. 1). Приложите её концы друг к другу так, чтобы углы одного цвета совпали, и склейте (рис. 2). Получится перекрученное кольцо, которое и называется листом Мёбиуса. Сколько у него сторон? Две, как у любого обычного куска бумаги? А вот и нет – у него одна сторона. Не верите? Тогда отметьте любую точку на этом перекрученном кольце на равных расстояниях от краёв. Проводите линию вдоль по кольцу, не отрывая ручки от бумаги (рис. 3). Линия должна всё время идти посередине между краями полоски. Как это ни удивительно, вы постепенно нарисуете линию вдоль всего кольца (с обеих сторон бывшей полоски) и вернётесь в исходную точку. Пересекать край при этом не потребуется.

Кстати, и край у нашего листа тоже только один – если посадить на него гусеницу, она сможет проползти по всему краю листа и вернуться в исходную точку.

Для дальнейшего вам понадобятся несколько листов Мёбиуса, заготовьте их заранее.

ПРОДОЛЖАЕМ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Представьте, что вы разрезали обычное бумажное кольцо по его средней линии. Ясно, что оно распадется на два кольца половинной ширины. А что получится, если таким же образом разрезать лист Мёбиуса (рис. 4)? Может быть, два листа Мёбиуса? Разрежьте, и у вас в руках окажется одно кольцо, причём дважды перекрученное.

Теперь возьмите другой экземпляр листа Мёбиуса, отступите на треть ширины от края и проводите линию, не удаляясь и не приближаясь к краю. Что получится, если разрезать лист вдоль получившейся линии? Результат будет очень неожиданным. Попробуйте угадать, а потом проверьте.

Вот ещё один интересный эксперимент. Склеим вместе два одинаковых кольца перпендикулярно друг другу, как показано на рисунке 5. Что будет, если разрезать каждое кольцо вдоль по средней линии? Получится квадратная рамка! Подумайте, откуда взялись прямые углы?

А если склеить аналогичным образом два листа Мёбиуса? Для удобства можете сначала изготовить фигуру, изображенную на рисунке 6 (просто склеив две полоски). Затем склейте концы фигуры так, чтобы углы одного цвета совпали (два конца загните вверх, два вниз). Два скреплённых листа Мёбиуса готовы. Разрежьте их по средним линиям. Что у вас получилось? Если вы сделаете несколько таких экспериментов с друзьями, результаты могут оказаться разными. От чего это зависит?

НЕ ТОЛЬКО ЛИСТ МЁБИУСА

Сделайте другую модель: в бумажной полоске прорежьте щель и проденьте сквозь неё один конец. Повернув на пол-оборота, склейте, как показано на рисунке 7. Что получится, если продолжить разрез вдоль всей ленты?

Рис. 4

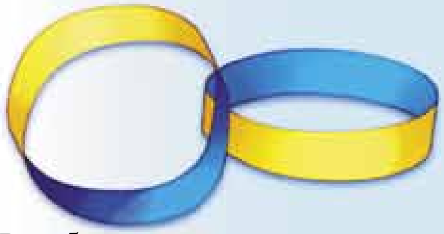


Рис. 5

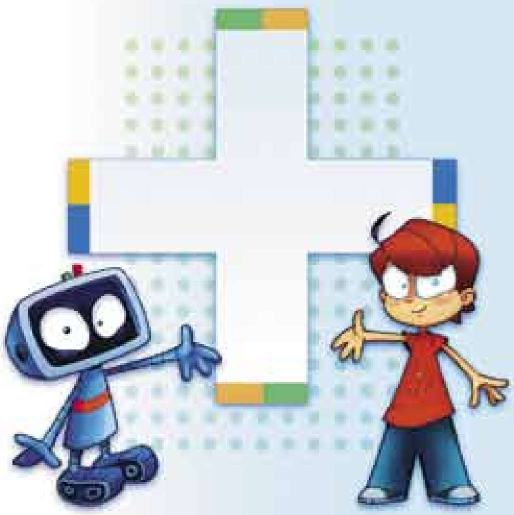


Рис. 6

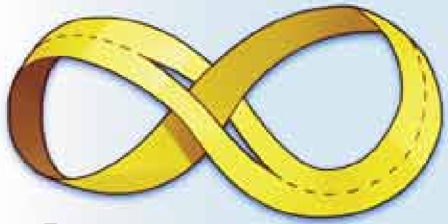


Рис. 7

Рис. 8

Чтобы изготовить лист Мёбиуса, мы поворачивали полоску бумаги на 180°, на пол-оборота. Теперь закрутите полоску на 360°, на полный оборот. Склейте, затем разрежьте её по средней линии. Что получилось?

Если вы сделаете кольцо, которое закручено на 3 полуоборота (540 градусов), и разрежете его по средней линии, у вас получится лист, который закручен узлом – вроде того, что изображён на рисунке 8. Поэкспериментируйте, закручивая полоску на большее число полуоборотов.

Склеивая фигуры из обычной бумажной полоски и разрезая их, вы можете совершить много интересных и неожиданных открытий. О результатах пишите нам. Ответы ко всем вопросам статьи читайте в следующем номере.

ЛИСТ МЁБИУСА ВОКРУГ НАС

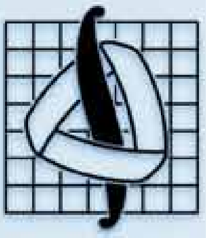


Рис. 9

Рис. 10

Лист Мёбиуса часто изображают на эмблемах и значках, как, например, на значке механико-математического факультета МГУ (рис. 9). Его используют в логотипах и торговых марках, яркий пример – международный символ повторного использования (рис. 10).

Во многих странах есть памятники листу Мёбиуса. На рисунке 11 приведена фотография памятника, поставленного во Франкфурте-на-Майне (Германия).

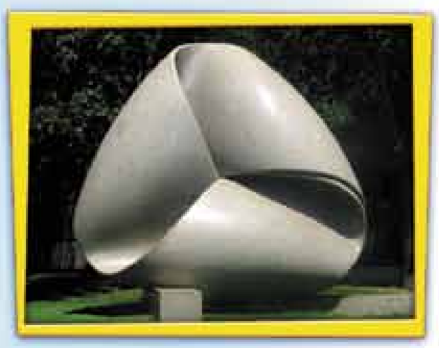


Рис. 11

Лист Мёбиуса используют и на практике. В виде листа Мёбиуса делают полосу ленточного конвейера. Это позволяет ему работать дольше, потому что вся поверхность ленты равномерно изнашивается. Ещё применяются ленты Мёбиуса в системах записи на непрерывную плёнку (чтобы удвоить время записи). В матричных принтерах прошлого века красящая лента также имела вид листа Мёбиуса.

Может быть, и вы придумаете новые применения этой замечательной математической идее?

Художник Д. Котова

Задача из анекдота

И. Акулич

Есть такой старый анекдот:

– Беда у меня с автомобилем!
– А в чём дело?
– Понимаешь, я купил карбюратор, который экономит 40 % бензина, распределитель зажигания, который даёт экономию в 50 %, и свечи, сберегающие 20 %.
– Ну и что?
– А то, что в сумме получается 110 %. Поэтому, когда я отъехал несколько километров, бензобак переполнился, и бензин начал заливать мотор!

Что и говорить, не повезло человеку! Но давайте попробуем, отбросив шутки в сторону, ответить на вопрос: а сколько процентов топлива на самом деле сэкономит такой автомобиль?

Разумеется, нельзя просто складывать проценты экономии. В таких случаях следует подсчитывать не экономию, а, наоборот, расход топлива. Ведь что такое экономия? Вот у нас карбюратор даёт экономию в 40 %. Это значит, что если раньше в час тратилось x литров бензина, то теперь будет тратиться на $0{,}4x$ литров меньше. Получается $0{,}6x$ литров в час (расход топлива умножился на $0{,}6 = 1 - 0{,}4$).

Что будет, если кроме чудо-карбюратора поставить ещё и распределитель зажигания, экономящий 50 %? Текущий расход топлива уменьшится вдвое. Из-за карбюратора он уже равен $0{,}6x$ литров в час. Значит, теперь он станет равным $0{,}5 \cdot 0{,}6x = 0{,}3x$ литра в час.

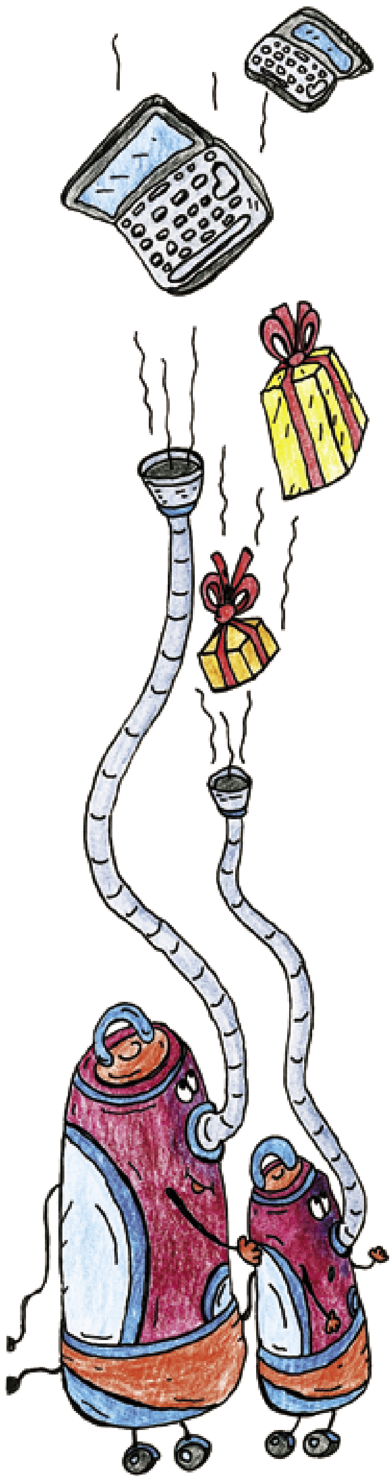
Свечи сэкономят ещё 20 % – домножаем текущий расход топлива ещё на 0,8. Получается $0{,}8 \cdot 0{,}3x = 0{,}24x$ литра в час.

Следовательно, после внедрения всех новинок, расход топлива по сравнению с «дореволюционным» составит всего 24 %. Поэтому реальная экономия равна $100 - 24 = 76$ %. Тоже, конечно, немало, но всё-таки не 110!

Художник Yustas-07

Е. Волович

КВАНТ*и*ЧЕК



Домик – это маленький дом, очочки – маленькие очки, коробочка – маленькая коробка, правильно? А квантик – маленький квант? Казалось бы, куда уж меньше – это же неделимая порция какой-либо величины в физике (от лат. quantum – «сколько»), например, квант света.

Ребёнок, которому «три годика», младше трёхлетнего ребёнка? Если вас пригласили на «чашечку» кофе, это будет обязательно эспрессо?

Эти слова (домик, годик, чашечка…) образованы с помощью «уменьшительно-ласкательных» (или, по-научному, «диминутивных») суффиксов (-ок, -ик, -очк, -ишк и т. п.), их первое, но совсем не единственное, значение – уменьшение размера.

Такие суффиксы очень продуктивны в русском языке – это значит, что с их помощью можно образовать новое слово, даже если до вас этого ещё никто не делал (например, пылесос – пылесосик, ноутбук – ноутбучек).

Делать так можно несколько раз подряд (нож – ножик – ножичек – ?). Бывают «уменьшительные» прилагательные (добренький) и наречия (быстренько). Очень часто уменьшительные суффиксы прибавляются к именам (Машенька, Петечка).

У уменьшительных слов есть ещё экспрессивное значение: разные дополнительные оттенки, которыми говорящий выражает своё отношение к предмету. Стишок – менее серьёзное стихотворение, актриска – скорее всего, не очень хорошая актриса и так далее. За некоторыми суффиксами закреплены определённые оттенки: книжонка, лошадёнка – это что-то жалкое, никчёмное; головушка, хлебушек, наоборот, произносятся с нежностью.

«Уменьшительное» значение даже часто утрачивается, образуются слова с отдельными значениями и сочетаемостью: мы не скажем «дверь шкафа» или «нога стула», какими бы большими они ни были. «Уменьшительные» существитель-

-ок -ок -ок -ок -ок -ишк -ишк -ишк -ишк -ишк -ишк -очк -очк -очк -очк -очк

ные иногда обозначают предметы нормального размера, а существительные, от которых они образованы, воспринимаются как «увеличительные» (кусок – кус; дырка – дыра, можно продолжить – дырища).

В языках, где нет продуктивного уменьшительного суффикса, значение «уменьшительности» выражается аналитически, то есть с помощью отдельного слова, например англ. little street, «маленькая улица», «улочка». Но, как и в русском, это не просто уменьшение размера – встречаются примеры вроде small quiet little street – «маленькая тихая улочка», буквально «маленькая тихая маленькая улица».

Так что «Квантик» – это не маленький квант, а такой милый и симпатичный «Квант» для юных. А для ваших младших братьев и сестёр, может быть, выйдет журнал «Квантичек».

Художник Л. Широнина

СТРОИМ ПРАВИЛЬНЫЙ МНОГОУГОЛЬНИК

А. Щетников

Сумеете ли вы разделить окружность на несколько равных частей? Знаете, как построить правильный многоугольник или звёздочку? Такие построения не только красивы, но и поучительны. Чтобы научиться их выполнять, возьмите чистый лист бумаги, циркуль, линейку и сделайте все чертежи самостоятельно, сверяясь с приведённым здесь описанием.

Обратите внимание: для всех построений школьной геометрии принято использовать линейку без делений. С помощью такой линейки можно провести на плоскости прямую линию через две уже отмеченные точки, а вот расстояния измерять нельзя. Ну а циркуль – это самый обычный циркуль для проведения окружностей.

Напомним, что правильным называется многоугольник, у которого все стороны равны и все углы равны. Вокруг него можно описать окружность (на которой окажутся все его вершины). При этом вершины разделят окружность на равные дуги.

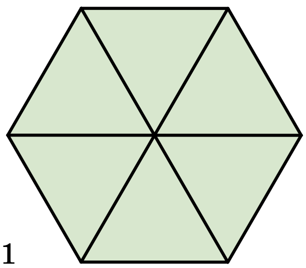


Рис. 1

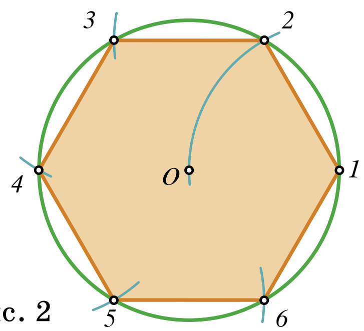


Рис. 2

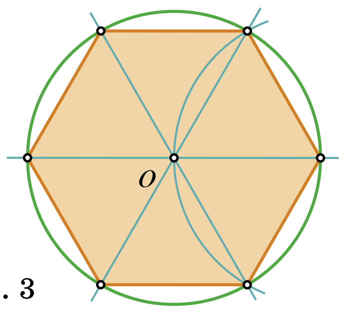
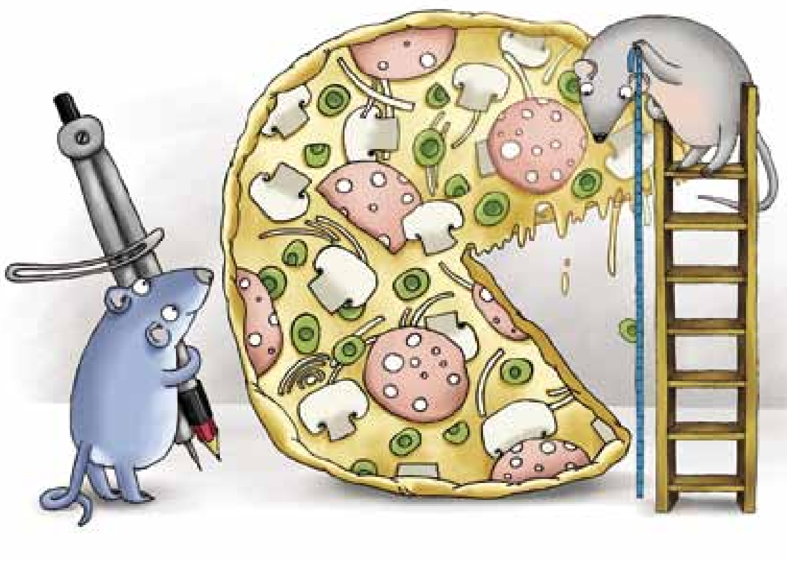


Рис. 3

ПРАВИЛЬНЫЙ ШЕСТИУГОЛЬНИК

Правильный шестиугольник можно получить, составив вместе шесть равносторонних треугольников, как показано на рисунке 1 (подумайте, почему). Значит, его сторона будет равна радиусу окружности, в которую он вписывается. Поэтому построить его можно так: нарисуем окружность, отметим на ней произвольную точку, а потом, не меняя раствора циркуля, сделаем на окружности последовательные засечки, как показано на рисунке 2. А можно и немного по-другому, как показано на рисунке 3: отметим одну вершину будущего шестиугольника, найдём две соседние с ней вершины с помощью засечек циркуля; а три оставшиеся вершины найдём, проведя диаметры через уже отмеченные вершины и центр окружности.



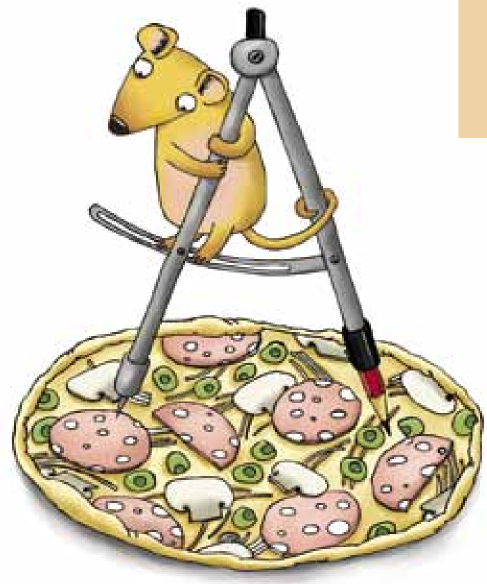
ПРАВИЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК и ПРАВИЛЬНЫЙ ДВЕНАДЦАТИУГОЛЬНИК

Рецепт построения вписанного в окружность равностороннего треугольника совсем прост: впишите в окружность правильный шестиугольник и возьмите его вершины через одну.

Разделив окружность на 6 равных частей, мы можем разделить её затем последовательно на 12, 24, 48 и т. д. равных частей, на каждом шаге деля пополам уже имеющиеся дуги.

Принцип деления пополам произвольной дуги AB показан на рисунке 4. Две точки A и B разбивают окружность на две дуги; одна из этих дуг делится пополам точкой C_1, а другая – точкой C_2. Рисунок 4 ещё не раз нам поможет.

Взгляните на рисунок 5. На нём показано, как из уже построенных шести равных дуг окружности получить двенадцать равных (красным цветом выделены вершины ранее построенного шестиугольника). Мы просто делим каждую дугу пополам. Заметили, что на рисунке 5 несколько раз встречается рисунок 4?



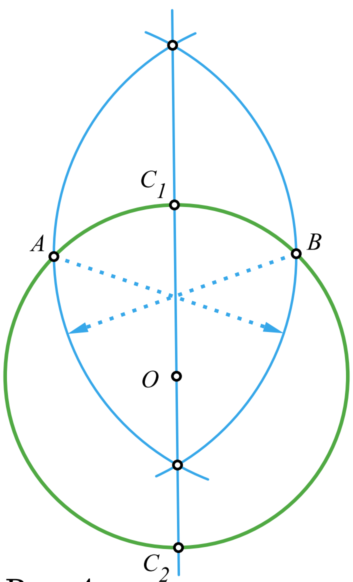


Рис. 4

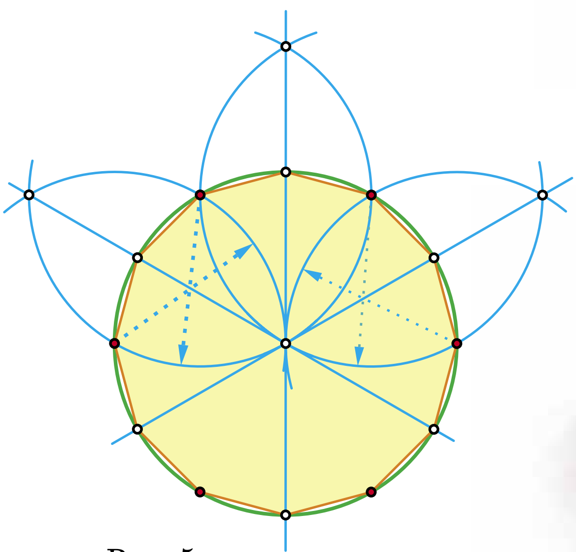
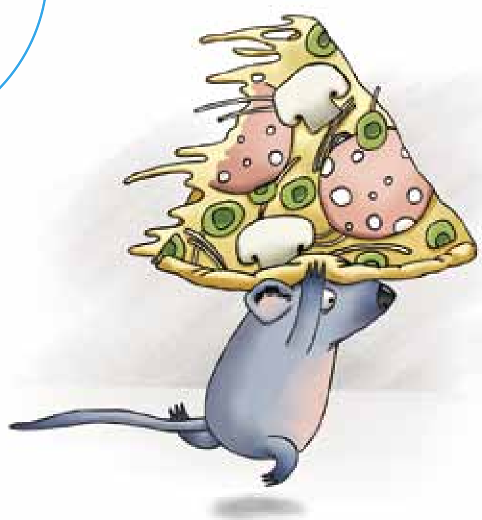


Рис. 5



ПРАВИЛЬНЫЙ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК и ПРАВИЛЬНЫЙ ВОСЬМИУГОЛЬНИК

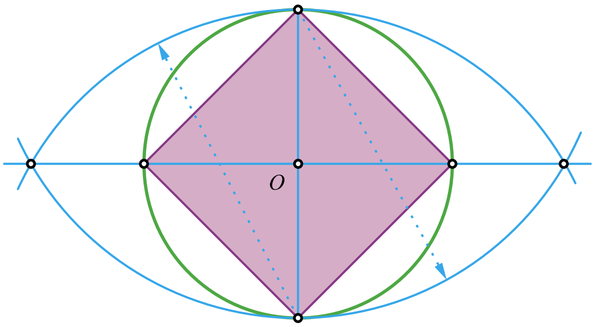


Рис. 6

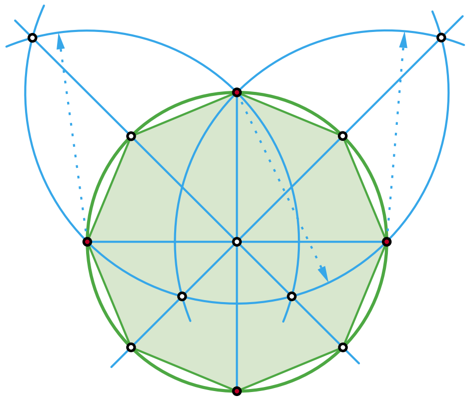


Рис. 7

Разделить окружность на две равные части совсем просто – надо провести любой диаметр. После того как диаметр проведён, последовательным делением дуг пополам мы можем найти вершины правильного четырёхугольника – квадрата (рис. 6), правильного восьмиугольника (рис. 7), правильного шестнадцатиугольника и т. д. Найдите, где на рисунках 6 и 7 встречается рисунок 4.

ПРАВИЛЬНЫЙ ПЯТИУГОЛЬНИК

Математики доказали, что окружность можно разделить с помощью циркуля и линейки далеко не на всякое число равных частей. Например, мы не сможем разделить её ни на семь, ни на девять равных частей – циркулем и линейкой эти построения невыполнимы.

А вот на пять равных частей с помощью циркуля и линейки окружность разделить можно! Это открытие было сделано древнегреческими геометрами – учениками Пифагора. Предполагают даже, что пятиконечная звезда служила опознавательным знаком пифагорейского союза.

Почему приведённое построение является верным, непосвящённому читателю понять довольно трудно: оно похоже на какой-то странный фокус. Доказать его справедливость вы сможете, когда будете учиться в старших классах – впрочем, и тогда это доказательство не покажется вам слишком простым.

Чтобы разделить окружность на пять равных частей, построим в ней два взаимно перпендикулярных диаметра AB и CD, как мы уже делали это при построении вписан-

СВОИМИ РУКАМИ

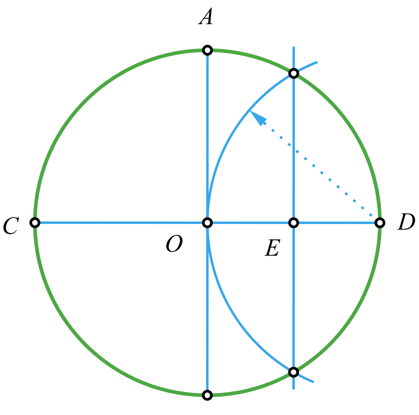


Рис. 8

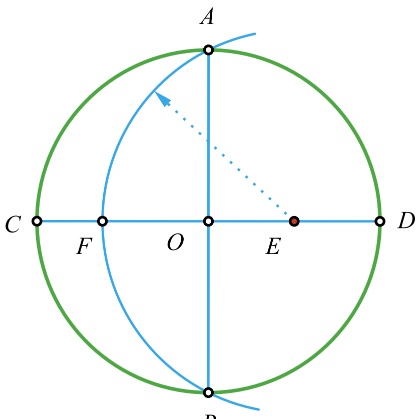


Рис. 9

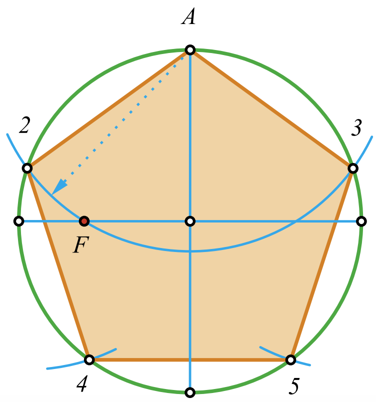


Рис. 10

ного квадрата. Радиус OD разделим пополам точкой E, как показано на рисунке 8. Проведём дугу окружности с центром E и радиусом EA; эта дуга пересечёт диаметр CD в точке F (рис. 9). Оказывается, что отрезок AF будет служить стороной вписанного в окружность правильного пятиугольника. Постройте сначала вершины с номерами 2 и 3, а потом, не меняя раствора циркуля, – вершины с номерами 4 и 5 (рис. 10). Убедитесь в том, что между вершинами 4 и 5 укладывается такой же раствор циркуля.

ПРАВИЛЬНЫЕ ЗВЁЗДОЧКИ

А теперь самостоятельно постройте правильную пятиконечную звёздочку (рис. 11) и правильную восьмиконечную звёздочку (рис. 12).

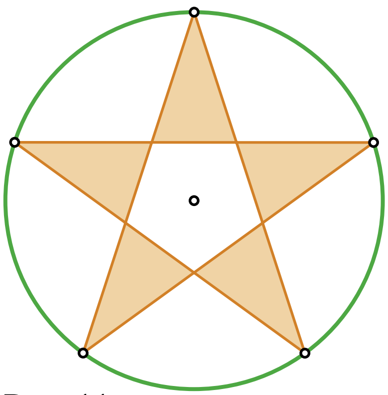


Рис. 11

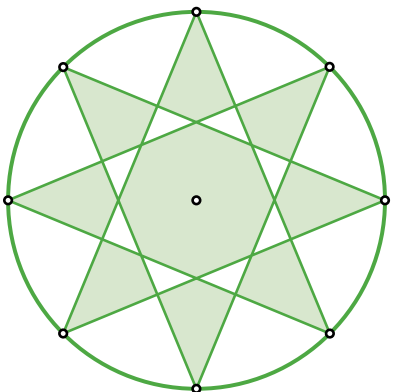


Рис. 12

Художник Ю. Можейко

СТЕРЕОМЕТРИЯ ДЛЯ ВСЕХ

С. Дориченко

Стереометрия изучается в 10 и 11 классах и считается трудным предметом. Но есть стереометрические задачи, для решения которых никаких старшеклассных знаний не нужно. На первый взгляд они могут показаться непростыми, но сто́ит немного подумать, вообразить, и... решение готово! Мы собрали здесь несколько таких задач. Дерзайте! Решения будут напечатаны в следующем номере.

Рис. 1

1. Есть кран с водой и цилиндрическая кастрюля (рис. 1). Как налить в кастрюлю воды ровно до половины?

Рис. 2

2. После семи стирок и длина, и ширина, и высота куска мыла уменьшились вдвое. На сколько стирок хватит оставшегося куска?

3. Расположите шесть одинаковых незаточенных карандашей так, чтобы каждый карандаш касался всех остальных.

Подсказка на рисунке 2.

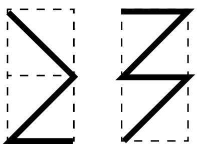


Рис. 3

4. а) Если смотреть на аквариум спереди, то рыбка проплыла, как показано на левой половине рисунка 3. А если смотреть справа – то как на правой половине рисунка 3. Нарисуйте вид сверху.

б) Решите ту же задачу для рисунка 4.

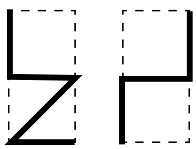


Рис. 4

5. Верно ли, что литровая и двухлитровая бутылки кока-колы подобны, то есть одна получается из другой увеличением всех размеров в несколько раз?

Подсказка: решение не требует никаких вычислений.

6. На рисунке 5 сверху изображена развёртка куба. У каких кубиков, нарисованных ниже, может быть такая развёртка?

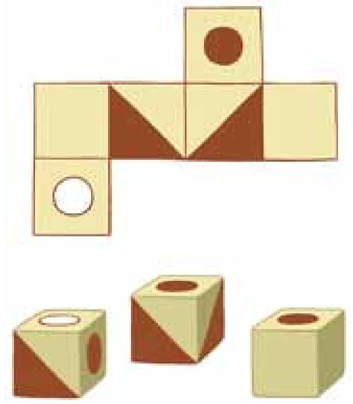


Рис. 5

7. Что тяжелее: два шара радиусов 3 см и 5 см или один шар радиуса 8 см? Шары сделаны из одного и того же материала.

Подсказка: подумайте, можно ли поместить первые два шара внутрь сферы радиуса 8 см.

8. Есть три одинаковых кирпича. Как с помощью одного измерения линейкой найти длину диагонали кирпича (то есть расстояние между двумя противоположными вершинами, не лежащими в одной грани)?

Подсказка на рисунке 6.

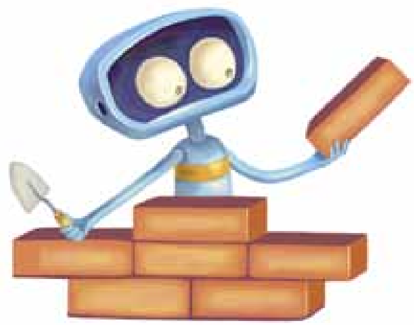


Рис. 6

9. а) Можно ли так расположить четыре шара в пространстве, чтобы каждый касался всех остальных?

б) А пять шаров (не обязательно одинаковых)?

10. Есть 20 шариков, склеенных так, что получились две «цепочки» по 4 шарика в каждой и два «прямоугольника» из 6 шариков со сторонами 2 и 3 шарика (рис. 7). Как сложить эти 4 набора, чтобы получилась составленная из шариков объёмная треугольная пирамида?

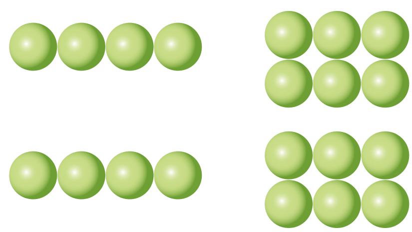


Рис. 7

Художник В. Гаптарь

И. Маховая

СТАРИННЫЕ РУССКИЕ МЕРЫ ДЛИНЫ

Какими мерами длины мы сегодня пользуемся? Правильно, метрическими: миллиметрами, сантиметрами, метрами, километрами… За единицу длины в этой международной системе был принят один метр и изготовлен его эталон из металлического бруса. Измерить что-либо теперь можно точно. Но так было не всегда.

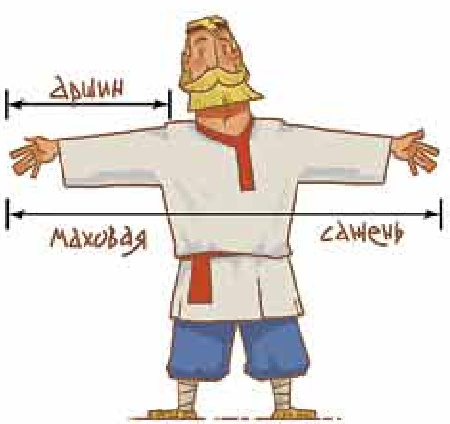
В старину на Руси использовали меры длины, где за основу брали длину той или иной части тела взрослого мужчины. Так как абсолютно одинаковых людей не существует, то меры эти были приблизительно такими, как представлено на следующей странице.

Есть немало известных изречений, в которых используются эти меры длины.

Например,

Мерить на свой аршин
Семь пядей во лбу
Косая сажень в плечах

Что они означают? А какие ещё изречения знаешь ты?



Аршин ~ 0,711 м, 4 пяди, расстояние от плеча до конца пальцев вытянутой руки.

Маховая сажень ~ 1,76 м, расстояние между концами пальцев рук, вытянутых в стороны.

Сажень ~ 2,13 м, 3 аршина, расстояние от пола до конца пальцев вытянутой вверх руки.

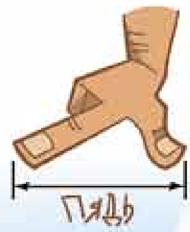
Косая сажень ~ 2,48 м, расстояние от большого пальца правой ноги до концов пальцев вытянутой вверх и в сторону левой руки.

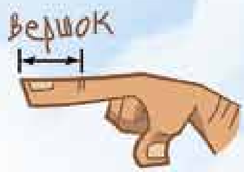
Локоть ~ 0,50 м, 10 вершков, расстояние от локтевого сустава согнутой руки до конца пальцев.

Пядь ~ 0,19 м, ¼ аршина, расстояние между концами большого и указательного пальцев, вытянутых на плоской поверхности.

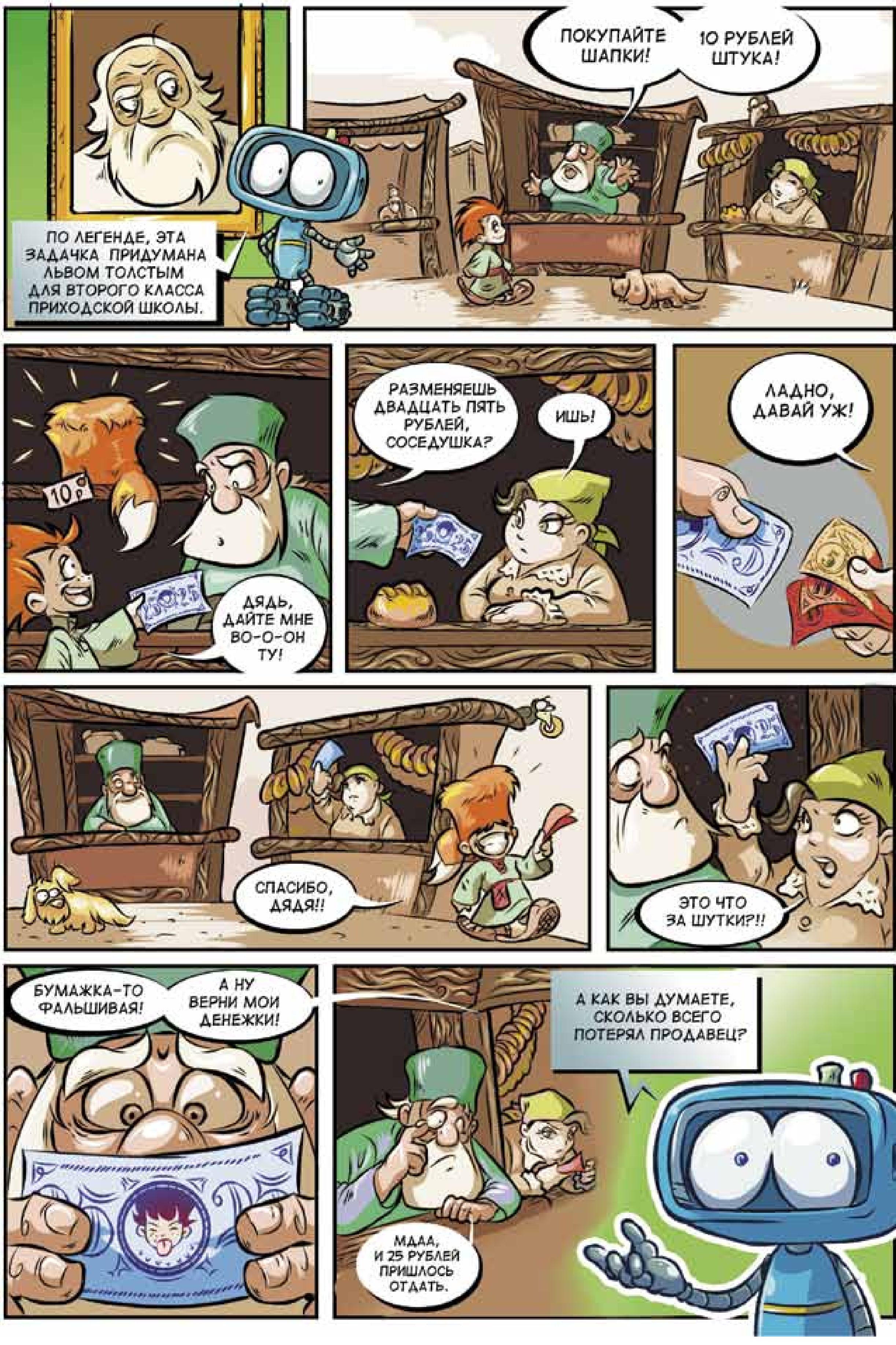
Вершок ~ 0,05 м, ¼ пяди, два верхних сустава указательного пальца.

Верста ~ 1070 м, 500 саженей, старинная русская мера пути.





Художник В. Пяткин

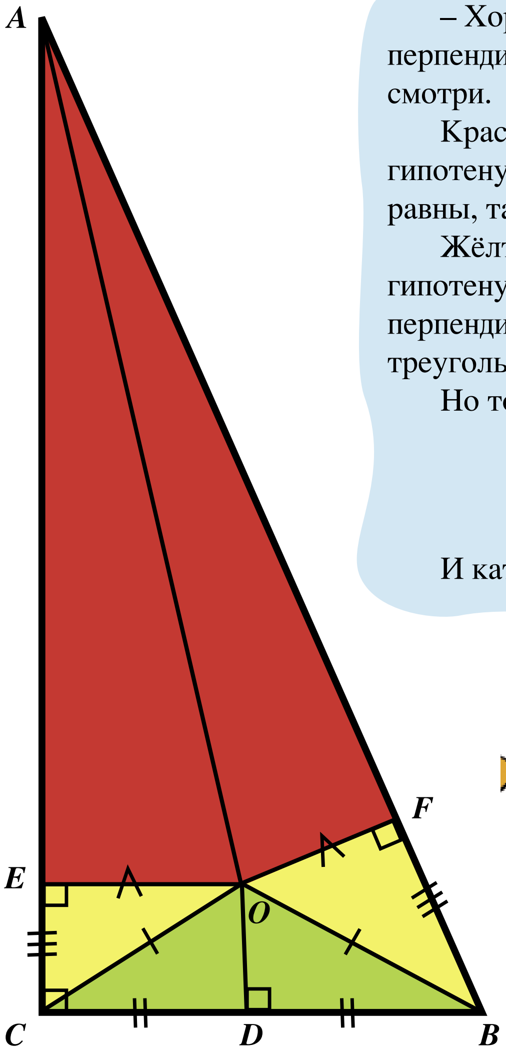


Художник А. Баранов

Катет равен гипотенузе?

– Знаешь, что в прямоугольном треугольнике катет равен гипотенузе?

– Как это? Вот отличный прямоугольный треугольник *ABC*, и там они разные!



– Хорошо! Проведём биссектрису угла *A* и серединный перпендикуляр к *BC*. Они пересекутся в точке *O*. А теперь смотри.

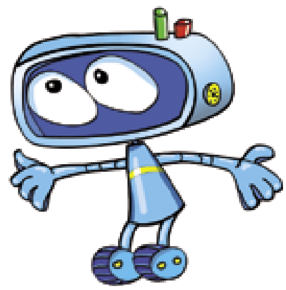
Красные треугольники равны как прямоугольные по гипотенузе и углу (сторона *AO* общая, а углы *OAE* и *OAF* равны, так как *AO* биссектриса).

Жёлтые треугольники равны как прямоугольные по гипотенузе и катету ($OC = OB$, так как *OD* – серединный перпендикуляр; $OE = OF$ из предыдущего равенства треугольников).

Но тогда

$$\begin{array}{c} AE = AF \\ + \\ \underline{CE = BF} \\ AC = AB \end{array}$$

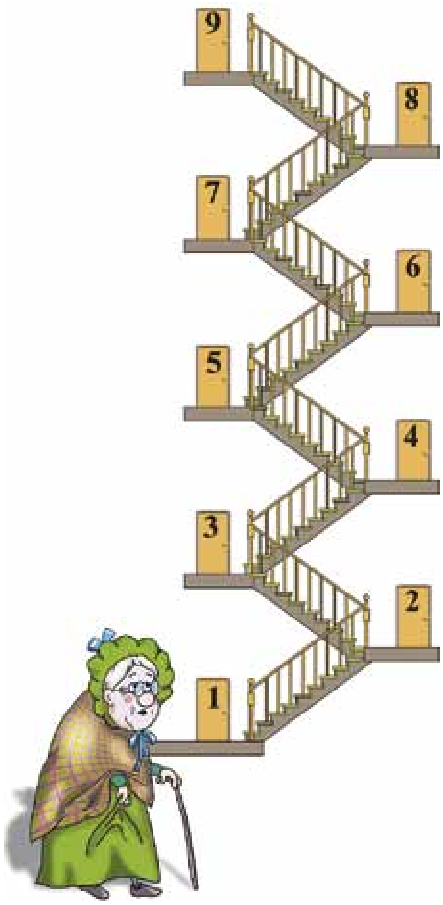
И катет равен гипотенузе!



– ААААААААА????!!!!!
Здесь где-то ошибка! Такого не бывает!

Художник И. Гумерова

НАШ КОНКУРС



Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем конкурсе.

Высылайте решения задач, с которыми справитесь, не позднее 1 марта по электронной почте **kvantik@mccme.ru** или обычной почтой по адресу **119002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, журнал «Квантик».**

Задачи конкурса будут печататься в каждом номере, итоги будут подведены в конце года. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик», научно-популярные книги, диски с увлекательными математическими мультфильмами.

Желаем успеха!

I ТУР

1. Старушка поднялась с 1-го этажа на 5-й за пять минут. За сколько минут она поднимется с 1-го этажа на 9-й, если будет идти с той же скоростью?

2. Перед вами стишок о мышке и кошке (слева) и его перевод (построчный) на язык племени Ам-Ям (справа):

Мышка ночью пошла гулять.	*Ам ту му ям,*
Кошка ночью видит – мышка!	*Ту ля бу ам,*
Мышку кошка пошла поймать.	*Гу ля ту ям.*

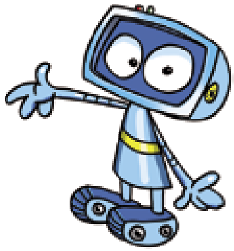
Составьте по ним фрагмент русско-ам-ямского словаря (то есть укажите перевод каждого слова из стишка).

АМ	
ТУ	
МУ	
ЯМ	
БУ	
ГУ	
ЛЯ	

Авторы задач 2 – 5:
Е. Фёдоров,
Л. Штейнгарц,
И. Рубанов,
С. Фомин

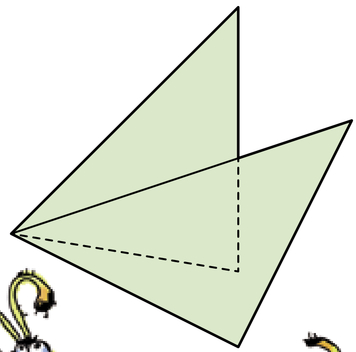
3. В слове КВАНТИК каждую букву заменили некоторой цифрой. Одинаковые буквы (то есть две буквы К) были заменены одинаковыми цифрами, а разные – разными. Оказалось, что выполняется равенство

КВА + Н = ТИК

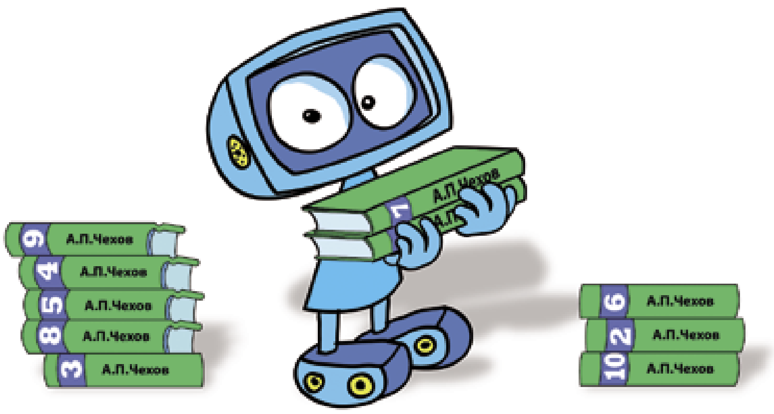


Найдите произведение цифр числа КВАНТИК.

4. На рисунке показано, как можно наложить друг на друга два треугольника, чтобы получился пятиугольник. А для каких еще чисел N можно получить N-угольник наложением (или приложением) двух треугольников? Найдите как можно больше таких N, все ответы подтвердите рисунками (для каждого примера можно заново выбирать треугольники).

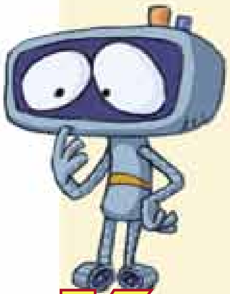


5. На столе в двух стопках лежат 10 томов собрания сочинений Чехова. Квантик подходит к любой стопке, снимает сверху несколько книг и кладёт их на другую стопку. Как ему за 19 таких операций (или меньше) расположить все тома в одной стопке по порядку номеров (снизу 1-й, затем 2-й и так далее)?



Художник: И. Гумерова

С какой стороны руль у этой машины?



Квантик

ЖУРНАЛ ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

Главный редактор: С. Дориченко
Зам. главного редактора: И. Маховая
Редактор: Г. Фельдман
Главный художник: Yustas-07
1 и 4 стр. обложки - В. Пяткин
Художественный редактор:
Д. Кожемякина
Верстка: И. Гумерова, Р. Шагеева
Формат 84х108/16
Издательство МЦНМО

Журнал "Квантик" зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Свидетельство ПИ N ФС77-44928 от 4 мая 2011 г.

Тираж: 1-й завод 500 экз.
Адрес редакции:
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11.
Тел. (499)241-74-83.
e-mail: kvantik@mccme.ru
По вопросам распространения обращаться по телефону:
(499) 241-72-85;
e-mail: biblio@mccme.ru

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами в ЗАО "ИПК Парето-Принт", г. Тверь.
www.pareto-print.ru
Заказ №